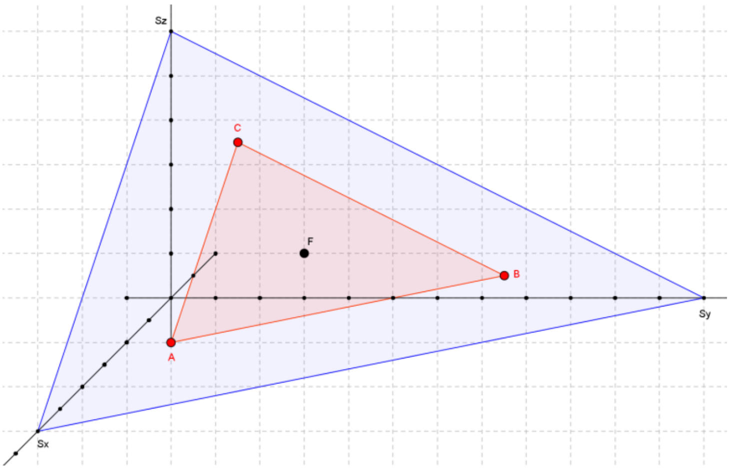
Musterlösung

Teil a)

PF: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

PNF: $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = 0$, also: NF: $E: \vec{x} \circ \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = 12$ und KF: E: $2x + y + 2z = 12$

Die Spurpunkte lauten somit: $S_x(6/0/0)$, $S_y(0/12/0)$ und $S_z(0/0/6)$.



Die Skizze zeigt auch

die Punkte A, B, C und F!

Teil b)

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

Einsetzen von g in E liefert dann: $2(6 + 2\lambda) + 6 + \lambda + 2(6 + 2\lambda) = 12 \Leftrightarrow 9\lambda = -18$

also: $\lambda = -2$

somit gilt: F(2/4/2)

V = 27 VE (am besten über Formel) $V = \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}18\\9\\18\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}\right|$

Alternativweg über: $h_P = 6$ LE und G = 13,5 FE

Teil c)

E_2: $2x + y + 2z = d$; also $d = 2 \cdot 6 + 6 + 2 \cdot 6 = 30$

Teil d)

Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren muss 0 sein, man wählt also zum Beispiel:

$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow d = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = 6$; **somit etwa:** E_3: $-x + 2y = 6$

Es gibt natürlich unendlich viele Lösungen!

Teil e)

$S_{ABC}(2/4/2)$ und s_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $S_{BCS}(\frac{8}{3} / \frac{16}{3} / \frac{11}{3})$ und s_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$s1 \cap s2$:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

i) $2\alpha + 2\beta = -2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = -1$

ii) $\alpha - 5\beta = -4$

iii) $2\alpha - 4\beta = -5$

i) – ii) $6\beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 0,5 \Rightarrow \alpha = -1,5$

Probe in iii) führt zu einer wahren Aussage, also Schnitt von s_1 und s_2 in S(3/4,5/3).

Teil f)

Ein möglicher Richtungsvektor der Seitenkante $\overline{AS}$ lautet $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, der Normalenvektor der Ebene ist bekannt. Es gilt also:

$$\sin(\varphi) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{18}{\sqrt{45} \cdot 3}\right) = \arcsin\left(\frac{6}{\sqrt{45}}\right) \approx 63{,}43°$$

Aufgabe Nr. 2

$\mathbf{E_a}$: $2x + (a - 3) \cdot y + a \cdot z = 6 - 2a$

$\mathbf{E_1}$: $2x - 2y + z = 4$

$\mathbf{E_2}$: $2x - y + 2z = 2$

Teil a)

A(2/0/0), B(0/-2/0) und C(0/0/4)

PF: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

PNF: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = 0$

Teil b)

$\mathbf{E_1}$: $2x - 2y + z = 4$

$\mathbf{E_2}$: $2x - y + 2z = 2$

$\mathbf{E_2 - E_1}$: $y + z = -2 \Leftrightarrow y = -2 - z$

$2x + 2 + z + 2z = 2 \Leftrightarrow 2x + 3z = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}z$

$L = \{ (-\frac{3}{2}z/-2-z/z) \} \Leftrightarrow g:\ E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$

Schnittwinkel:

$\varphi = \arccos\left(\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right| : 9\right) = \arccos\left(\frac{8}{9}\right) \approx 27{,}27°$

Teil c)

P(4/-1/9)

$d(P, E_1) = \frac{1}{3} \cdot \left|\left[\begin{pmatrix}4\\-1\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3} \cdot \left|\begin{pmatrix}2\\-1\\9\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right| = 5 \text{ LE}$

Teil d)

$N(0/0/0) \Rightarrow 6 - 2a = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a = 3}$

Teil e)

Erläuterungen:

Der Normalenvektor der Ebenenschar wird notiert und dann auf Parallelität zum Richtungsvektor der x-Achse hin untersucht. Die erste Zeile des entstehenden Gleichungssystems liefert r = 2, aufgrund der dritten Zeile folgte dann a = 0, dies führt schließlich in der zweiten Zeile zu der falschen Aussage -3 = 0 (Widerspruch).

Es gibt also keine Ebene der Ebenenschar, die parallel zur y-z-Ebene verläuft (diese hat nämlich den Richtungsvektor der x-Achse als Normalenvektor)!

Teil f)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\a-3\\a\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\a-3\\a\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|a-3|}{\sqrt{2a^2-6a+13}} \Leftrightarrow a^2 - 3a + 6{,}5 = a^2 - 6a + 9 \Leftrightarrow a = \frac{5}{6}$$

Aufgabe Nr. 3

Teil a)

Man stellt eine Ebene E mit der Eigenschaft auf, dass deren Normalenvektor orthogonal zu beiden Richtungsvektoren der gegebenen Geraden g und h verläuft (Bild 1). Von einem Punkt P auf der Geraden g aus, fällt man das Lot in die Ebene E. Dafür stellt man mit Hilfe des Normalenvektors der Ebene eine entsprechende Gerade k auf. Der Schnittpunkt S von k und E kann dann mühelos bestimmt werden (Bild 2). Der Abstand der Punkte P und S entspricht dann dem Abstand der beiden vorgegebenen windschiefen Geraden g und h (Bild 3).

Teil b)

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\9\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \text{ z. B. } E: x-3y+z=10$$

Berechnung über die Abstandsformel Punkt-Ebene:

$$d(g, h) = d(P,E) = \frac{1}{\sqrt{11}}\left|\left[\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{11}}\left|\begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{22}{\sqrt{11}} = \sqrt{44}\text{ LE}$$

Berechnung explizit über den Lotfußpunkt S:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} \text{ und E: } x - 3y + z = 10$$

$4 + \lambda - 3(6 - 3\lambda) + 2 + \lambda = 10 \Leftrightarrow -12 + 11\lambda = 10 \Leftrightarrow 11\lambda = 22 \Leftrightarrow \lambda = 2$

also: S(6/0/4)

somit dann: $\vec{PS} = \begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix} \Rightarrow d(g,h) = |\vec{PS}| = \left|\begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{44}$