Musterlösung der Klausur Nr. 1 (Q1-Phase)

Aufgabe 1

a) $f'(x) = 4x^3 + 2 \cdot \cos(x)$

b) $f'(x) = 2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x) = x \cdot (2 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x))$

c) $f_k'(x) = 2xe^{kx} + k(x^2 - k) \cdot e^{kx} = e^{kx}\,(kx^2 + 2x - k^2)$

d) $f'(x) = \dfrac{2xe^{2x} - e^{2x}}{x^2} = \dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{e^{u(x)} + x \cdot u'(x) \cdot e^{u(x)}}{2 \cdot \sqrt{x \cdot e^{u(x)}}} = \dfrac{e^{u(x)}\left(1 + x \cdot u'(x)\right)}{2 \cdot \sqrt{x \cdot e^{u(x)}}}$

f) $f'(x) = \dfrac{3\sin^2(\sqrt{x}) \cdot \cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

g) $f'(x) = \ln(5) \cdot 5^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$

Aufgabe 2

Teil a)

$f_k(1) = e^{-k}$; also: $e^{-k} = e^{-2}$

also: $k = 2$

Teil b)

f_k ist stets punktsymmetrisch zum Ursprung!

zu zeigen: $f_k(x) = -f_k(-x)$

$x^3 \cdot e^{-kx^2} = -\left((-x)^3 \cdot e^{-k \cdot (-x)^2}\right)$

$x^3 \cdot e^{-kx^2} = x^3 \cdot e^{-kx^2}$

Teil c)

Diskutiert wird nun also: $f_1(x) = x^3 \cdot e^{-x^2}$

ID = IR

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f = 0$

Nullstellen:

$f_1(x) = 0$, d. h. $x^3 \cdot e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (denn: $e^{-x^2} \neq 0$ für alle $x \in$ IR)

Ableitungen:

$f_1'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x^2} - 2x^4 \cdot e^{-x^2} = x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (3 - 2x^2) = e^{-x^2} \cdot (3x^2 - 2x^4)$

Je nachdem, welche Darstellungsform der **ersten** Ableitung man zur Berechnung der **zweiten** Ableitung als Ausgangsgleichung wählt, folgt dann:

$f_1''(x) = 6x \cdot e^{-x^2} - 6x^3 \cdot e^{-x^2} - 8x^3 \cdot e^{-x^2} + 4x^5 \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2}(4x^4 - 14x^2 + 6)$

oder auch:

$f_1''(x) = -2x \cdot e^{-x^2}(3x^2 - 2x^4) + e^{-x^2}(6x - 8x^3) = e^{-x^2} \cdot (-6x^3 + 4x^5 + 6x - 8x^3)$

$= x \cdot e^{-x^2}(4x^4 - 14x^2 + 6)$

Hinweis: Man kann auch die Ableitungsregel $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ wählen!

Extrema:

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (3 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;\ x_{2/3} = \pm\sqrt{1{,}5}$

Auswertung der Kandidaten:

$f_1''(0) = 0$ (keine Aussage möglich)

$f_1''(\sqrt{1{,}5}) = \sqrt{1{,}5}\ e^{-1{,}5} \cdot (9 - 21 + 6) = -6 \cdot \sqrt{1{,}5}\ e^{-1{,}5} < 0 \Rightarrow$ HP bei $H(\sqrt{1{,}5}/0{,}41)$

Wegen der Punktsymmetrie gilt dann: TP bei $T(-\sqrt{1{,}5}/-0{,}41)$.

Wendepunkte:

$f_1''(x) = 0$, d. h. $x \cdot e^{-x^2}(4x^4 - 14x^2 + 6) = 0$

Fallunterscheidung liefert dann:

$x_1 = 0$

Substitution für den biquadratischen zweiten Fall:

$4z^2 - 14z + 6 = 0$

$z^2 - 3{,}5z + 1{,}5 = 0$

$z_{1/2} = 1{,}75 \pm 1{,}25$

$x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$

$x_{4/5} = \pm\sqrt{0{,}5}$

Auswertung der Wendepunktkandidaten laut Aufgabenstellung nicht notwendig, es ergibt sich mit Hilfe der Ausgangsgleichung (y-Werte sind Näherungswerte):

$W_1(0/0)$, $W_2(\sqrt{0{,}5}/0{,}21)$, $W_3(-\sqrt{0{,}5}/-0{,}21)$, $W_4(\sqrt{3}/0{,}26)$ und $W_5(-\sqrt{3}/0{,}26)$

W_1 ist **Sattelpunkt**!

Teil d) vgl. folgende Seite!

Teil e)

Voraussetzung: $k_1 \neq k_2$

$x^3 \cdot e^{-k_1x^2} = x^3 \cdot e^{-k_2x^2}$ | : x³; wobei $x \neq 0$; also: N(0/0) ist gemeinsamer Punkt

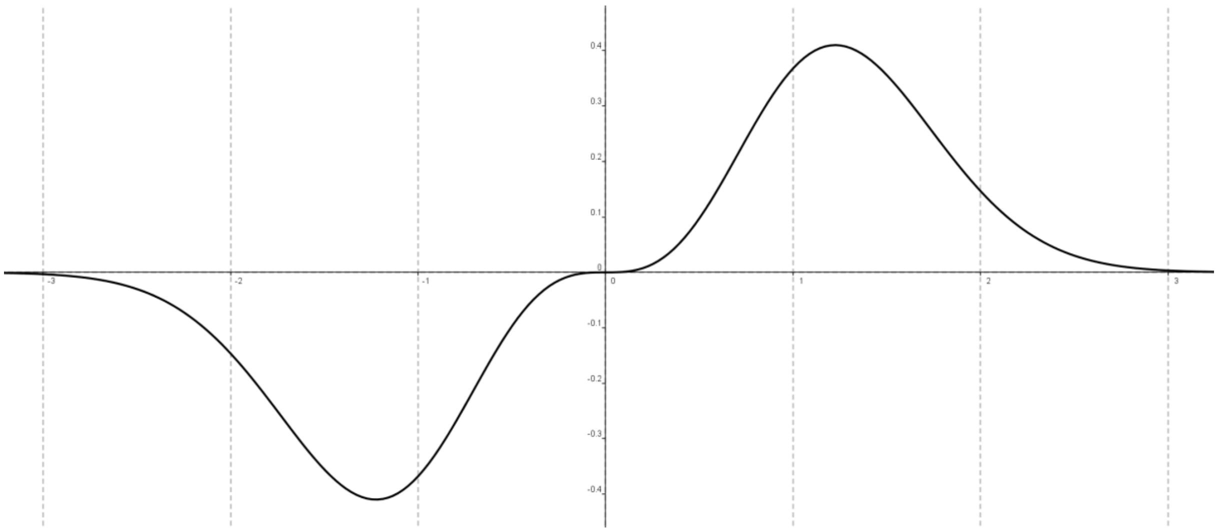
$e^{-k_1x^2} = e^{-k_2x^2}$ | ln()

$-k_1x^2 = -k_2x^2$ | : x^2; wobei $x \neq 0$; N(0/0) bereits notiert!

$k_1 = k_2$

Widerspruch zur Voraussetzung, es gibt keine **weiteren** gemeinsamen Punkte!

Graph von f_1



Teil f)

$f_k(x) = x^3 \cdot e^{-kx^2}$

also: $f'_k(x) = 3x^2 \cdot e^{-kx^2} - 2kx^4 \cdot e^{-kx^2} = x^2 \cdot e^{-kx^2} \cdot (3-2kx^2)$

$f'_k(x) = 0$, d. h. $x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2k}}$

Laut Aufgabenstellung liegen die Hochpunkte von f_k bei $H_k(\sqrt{\frac{3}{2k}} \,/\, \left(\sqrt{\frac{3}{2k}}\right)^3 \cdot e^{-1,5})$.

Da der substituierte Ausdruck $x = \sqrt{\frac{3}{2k}}$ in der y-Koordinate ebenfalls vorkommt, kann die Ortskurve ohne Rechnung angegeben werden, es gilt: $h(x) = e^{-1,5} \cdot x^3$.

Teil g)

Ansatz: $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{2k}} \Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Teil h)

$f_k(1) = e^{-k}$ und $f'_k(1) = e^{-k}\,(3 - 2k)$; also: $t_k(x) = e^{-k}\,(3 - 2k) \cdot x + b$

Es folgt: $e^{-k} = e^{-k}\,(3 - 2k) \cdot x + b \Leftrightarrow b = e^{-k} - e^{-k}\,(3 - 2k) = -2e^{-k} + 2ke^{-k} = 2e^{-k}\,(k - 1)$

Es gilt also schließlich: $t_k(x) = e^{-k}\,(3 - 2k) \cdot x + 2e^{-k}\,(k - 1)$

Aufgabe 3

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a(x+h)^2 + b(x+h)} - \sqrt{ax^2 + bx}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a(x+h)^2 + b(x+h)} - \sqrt{ax^2 + bx}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a(x+h)^2 + b(x+h)} + \sqrt{ax^2 + bx}}{\sqrt{a(x+h)^2 + b(x+h)} + \sqrt{ax^2 + bx}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) - ax^2 - bx}{h \cdot (\sqrt{a(x+h)^2 + b(x+h)} + \sqrt{ax^2 + bx})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh - ax^2 - bx}{h \cdot (\sqrt{a(x+h)^2 + b(x+h)} + \sqrt{ax^2 + bx})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h \cdot (\sqrt{a(x+h)^2 + b(x+h)} + \sqrt{ax^2 + bx})}$$

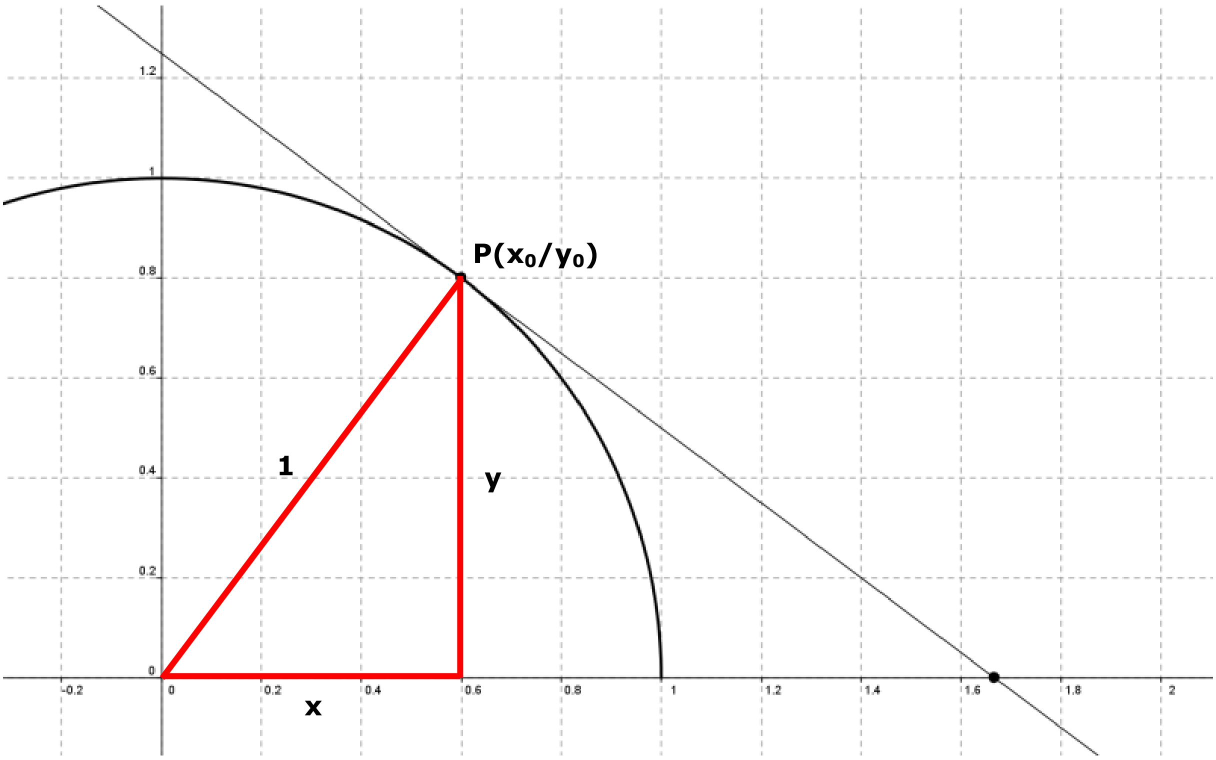
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (2ax + ah + b)}{h \cdot (\sqrt{a(x+h)^2 + b(x+h)} + \sqrt{ax^2 + bx})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2ax + ah + b}{(\sqrt{a(x+h)^2 + b(x+h)} + \sqrt{ax^2 + bx})}$$

$$= \frac{2ax + b}{2 \cdot \sqrt{ax^2 + bx}}$$

Aufgabe 4

Teil a)



Nach dem SdP gilt $x^2 + y^2 = 1$, dies löst man problemlos nach y auf und erhält die vorgegebene Funktion $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Teil b)

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, jedem x-Wert darf also maximal ein y-Wert zugeordnet werden. Im Falle des Einheitsvollkreises würden jedem x-Wert aus dem Intervall I =] -1 ; 1 [zwei y-Werte zugeordnet. Folglich kann es keine Funktion geben, die den Einheitsvollkreis beschreibt.

Teil c)

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

also gilt: $f'(x_0) = \dfrac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}$

$t(x) = mx + b = \dfrac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} \cdot x + b$

Wegen $t(x_0) = \sqrt{1-x_0^2}$ folgt dann: $\sqrt{1-x_0^2} = \dfrac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} \cdot x_0 + b$

$\Leftrightarrow b = \sqrt{1-x_0^2} + \dfrac{x_0^2}{\sqrt{1-x_0^2}} = \dfrac{1 - x_0^2 + x_0^2}{\sqrt{1-x_0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$

Somit gilt also:

$t(x) = \dfrac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} \cdot x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$

Nullstellenberechnung:

$t(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} \cdot x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} \cdot x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{x_0}$

$N(\dfrac{1}{x_0} / 0)$

Teil d)

Man zeichnet also eine Gerade durch den Tangentenberührpunkt $P(x_0/y_0)$ und einen Punkt N auf der x-Achse, dessen x-Wert der Kehrwert von x_0 ist.