Musterlösung der der Klausur Nr. 1 (Q1-Phase, GK)

Aufgabe 1

a) $f'(x) = 8 \cdot (2x^3 - x^2 + x + 1)^3 \cdot (6x^2 - 2x + 1)$

Anmerkung: Faktor- und Kettenregel liefern das Ergebnis

b) $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}$

Anmerkung: Summen- und Potenzregel der Differentialrechnung liefern das Ergebnis

c) $f_k'(x) = k \cdot e^{kx - 1}$

Anmerkung: Kettenregel liefert das Ergebnis

d) $f'(x) = 4x^3 \cdot \sin(x) + x^4 \cdot \cos(x)$

Anmerkung: Produktregel liefert das Ergebnis

e) $f'(x) = \frac{\cos(e^x) \cdot e^x}{2 \cdot \sqrt{\sin(e^x)}}$

Anmerkung: Kettenregel liefert das Ergebnis (**Vorsicht:** doppelte Verkettung)

f) $f_k'(x) = -\sin(u(x)) \cdot u'(x) \cdot e^{-x} - \cos(u(x)) \cdot e^{-x}$

Anmerkung: Produkt- und Kettenregel liefern das Ergebnis

Aufgabe 2

Teil a)

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ sowie $\lim\limits_{x \to \infty} f = \infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f = 0$

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

Ableitungen:

$f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x$

$f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 3) \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x - 3)$

$f''(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x - 3) + e^x \cdot (2x + 2) = e^x \cdot (x^2 + 4x - 1)$

Extrema:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_{1/2} = -1 \pm 2$

$f''(-3) = -4 \cdot e^{-3} < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt in $H(-3/6e^{-3})$

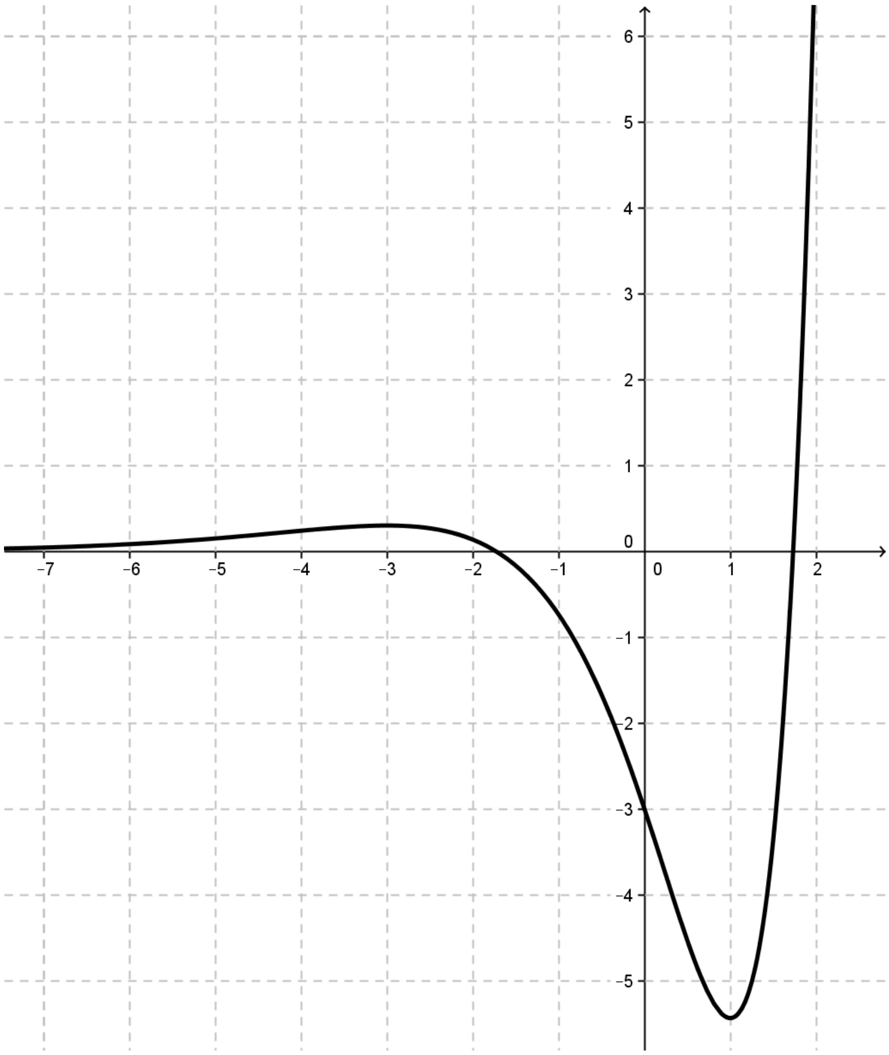
$f''(1) = 4 \cdot e^1 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt in $T(1/-2e)$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x^2 + 4x - 1) \Leftrightarrow x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{5}$

also: $W_1(0{,}24/-3{,}73)$ und $W_2(-4{,}24/0{,}22)$

Teil b)



Teil c)

$f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^x$

$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - k) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \sqrt{k}$

Teil d)

$f_k'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - k) \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x - k)$

$f_k''(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x - k) + e^x \cdot (2x + 2) = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2 - k)$

$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x^2 + 2x - k) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 + k}$

$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x^2 + 4x + 2 - k) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{2 + k}$

Teil e)

$t_k(x) = mx + b$

$m = f_k'(0) = -k$ und $f_k(0) = -k$

also: $t_k(x) = -kx - k$

Aufgabe 3

Teil a)

Symmetrie:

$f(x) = f(-x) \Leftrightarrow e^{-x^2} = e^{-(-x)^2}$

Wegen des geraden Exponenten ist das Vorzeichen eines x-Wertes bedeutungslos für den Funktionswert.

Grenzwertverhalten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f = 0$

Eine Exponentialfunktion strebt gegen null, wenn der Exponent gegen minus unendlich strebt – dieser Fall liegt hier für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ vor (vgl. Symmetrie).

Teil b) vgl. MATERIALVORGABE I!

Teil c)

Zielfunktion: $F(x) = 2x \cdot e^{-x^2}$

Ableitung: $F'(x) = 2 \cdot e^{-x^2} - 4x^2 \cdot e^{-x^2}$

Nullsetzen und Auflösen: $F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Aufgabe 4

a) Graphisches Differenzieren liefert in etwa $m_t \approx 1{,}75$ (vgl. MATERIALVORGABE II)!

b) $m_t \approx \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{f(4{,}01) - f(4)}{0{,}01} = \dfrac{\frac{e^{4{,}01}}{(4{,}01)^2} - \frac{e^4}{4^2}}{0{,}01} \approx 1{,}7126$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{e^{x+h}}{(x+h)^2} - \frac{e^x}{x^2}}{h}$

d) $f(x) = u(x) : v(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot \dfrac{1}{v(x)} = u(x) \cdot v^{-1}(x)$

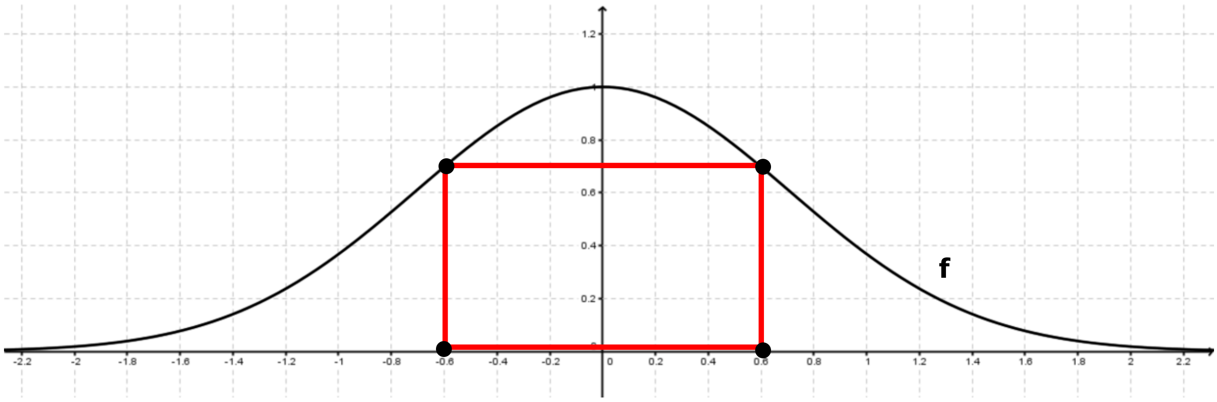
Anwendung der Produkt- und der Kettelregel liefert dann sofort:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v^{-1}(x) - u(x) \cdot v^{-2}(x) \cdot v'(x) = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

$$= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Hinweis: Die beiden Umformungen zu der memorierfreundlichen Darstellungsform in der letzten Zeile wurden natürlich nicht erwartet bzw. verlangt.

MATERIALVORGABE I



MATERIALVORGABE II