Musterlösung

Aufgabe 1

a) $f(x) = 3x^4 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 6x$

b) $f(x) = x^2 \cdot (x+4) + 1 = x^3 + 4x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 8x$

c) $f(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{2}{x^5} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{5}x^3 - \frac{10}{x^6}$

d) $f(x) = -\frac{3}{5}x^5 - \frac{a}{x^3} + bx + c$; $a, b, c \in R \Rightarrow f'(x) = -3x^4 + \frac{3a}{x^4} + b$

Aufgabe 2

vgl. letzte Seite!

Aufgabe 3

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Allgemeine Vorbereitungen:

D = R

$\lim_{x \to \infty} f = \infty$ und $\lim_{x \to -\infty} f = -\infty$

Argument: Polynomfunktion mit ungeradem Exponenten und positivem Koeffizienten vor der größten Potenz von x.

Nullstellen:

$0 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$0 = x(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 2)$ | : x; $x \neq 0$; $x_1 = 0$

$0 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow 0 = x^2 + \frac{3}{2}x - 6 \Leftrightarrow x_{2/3} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 6}$

$x_2 \approx -3{,}31$ und $x_3 \approx 1{,}81$

Extrema und Wendepunkte:

$f'(x) = x^2 + x - 2$

$f''(x) = 2x + 1$

$f'''(x) = 2$

$f'(x) = 0$, d. h. $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -0{,}5 \pm 1{,}5$

also: $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

Wegen $f''(-2) = -3 < 0$ folgt $H(-2/3\frac{1}{3})$ ist Hochpunkt!

Wegen $f''(1) = 3 > 0$ folgt $T(1/-1\frac{1}{6})$ ist Tiefpunkt!

$f''(x) = 0$, d. h. $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -0{,}5$

wegen $f'''(-0{,}5) = 2 \neq 0$ folgt $W(-0{,}5/1\frac{1}{12})$ ist Wendepunkt!

Normale:

$f'(x) = x^2 + x - 2$

$f'(0) = -2$, also: $m_n = 0{,}5$

$n(x) = \frac{1}{2}x$

Tangente:

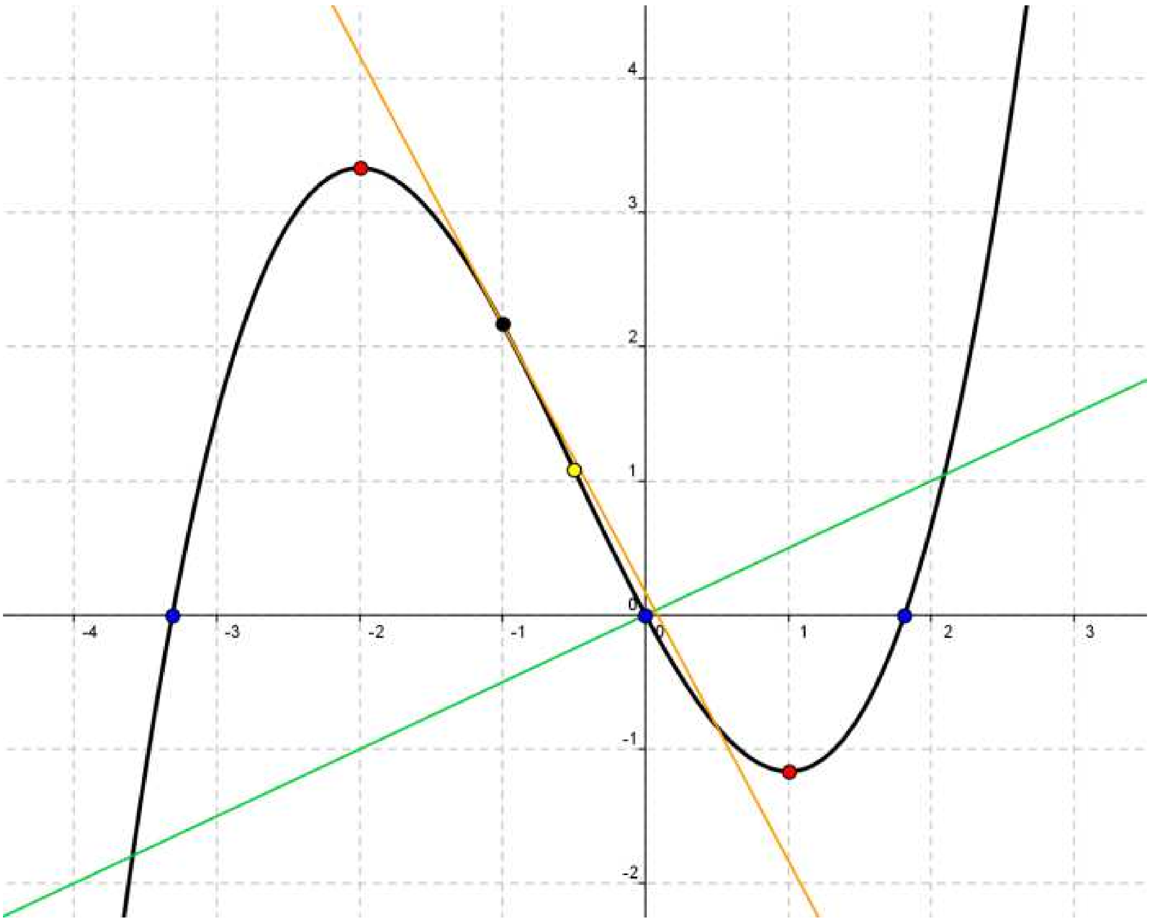
$f'(-1) = -2$, also: $m_t = -2$

$t(x) = -2x + b$

Wegen $f(-1) = 2\frac{1}{6}$ folgt $2\frac{1}{6} = 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{6}$

also: $t(x) = -2x + \frac{1}{6}$

Skizze



Aufgabe 4

$f_k(x) = x^3 - 3k^2x$

$f'_k(x) = 3x^2 - 3k^2$

$f''_k(x) = 6x$

$f'''_k(x) = 6$

Teil a) $f_k(2) = 2$, d. h. $2 = 8 - 6k^2 \Leftrightarrow 6k^2 = 6 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = 1$ (vgl. Voraussetzung)

Teil b)

Nullstellen:

$f_k(x) = 0$, d. h. $x^3 - 3k^2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3k^2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \pm\sqrt{3}\cdot k$

Teil c)

Extrema:

$f_k'(x) = 0$, d. h. $3x^2 - 3k^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3k^2 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm k$

$f_k''(k) = 6k > 0 \Rightarrow T_k(k/-2k^3)$

$f_k''(-k) = -6k < 0 \Rightarrow H_k(-k/2k^3)$

Ortskurve der Minima:

$x = k \Rightarrow g(x) = -2x^3$

Ortskurve der Maxima:

$x = -k \Rightarrow g(x) = -2x^3$

also: Minima und Maxima liegen auf der gleichen Ortskurve!

Aufgabe 5

Nebenbedingung: $1000 = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow \pi r^2 h = 1000 - \frac{2}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r$

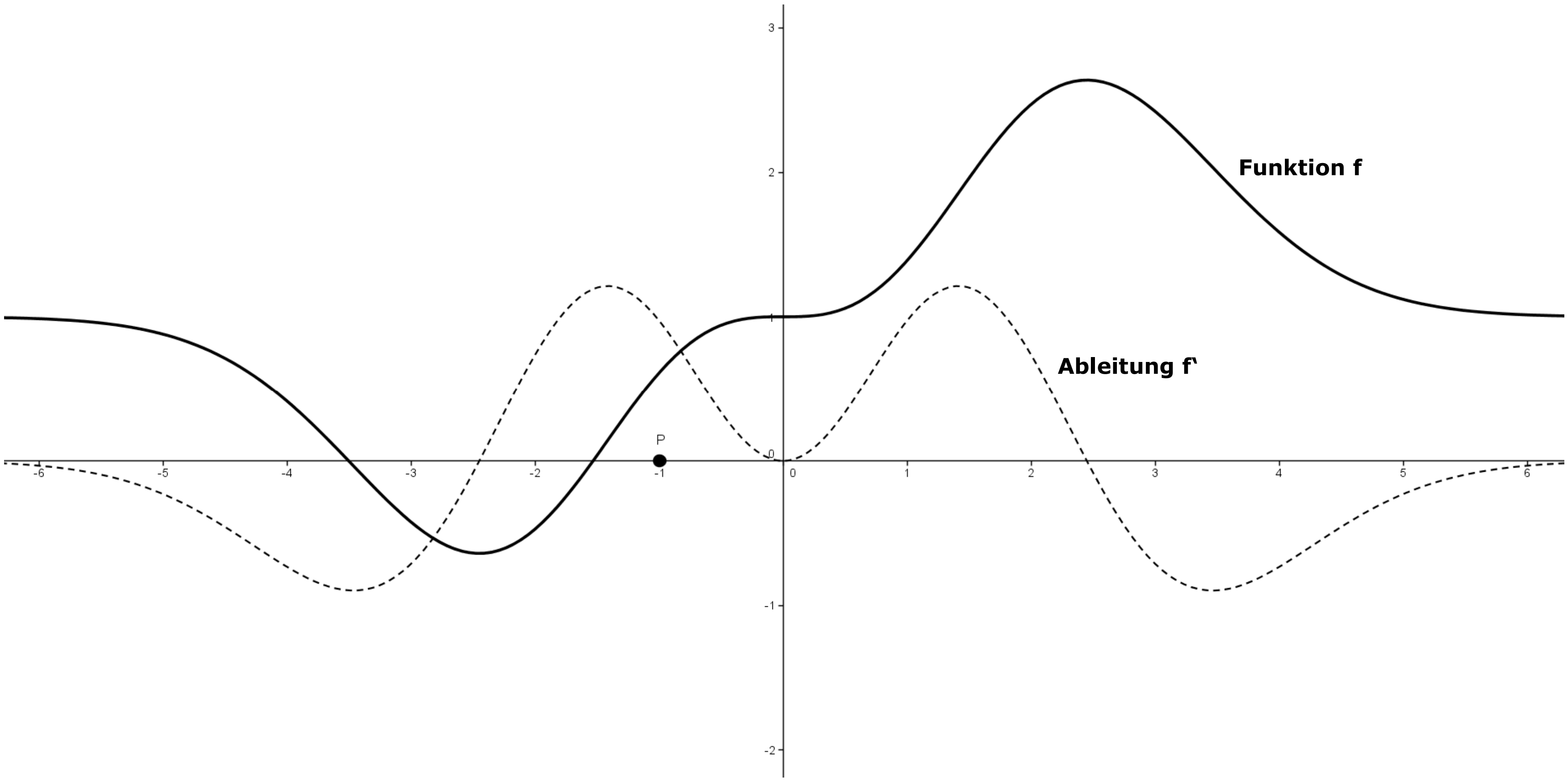
Zielfunktion: $M(r, h) = 2\pi rh + 3\pi r^2$

$M(r) = 2\pi r(\frac{1000}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r) + 3\pi r^2 = \frac{2000}{r} - \frac{4}{3}\pi r^2 + 3\pi r^2 = \frac{2000}{r} + 1\frac{2}{3}\pi r^2$

$M'(r) = -\frac{2000}{r^2} + \frac{10}{3}\pi r$

$M'(r) = 0$, d. h. $\frac{2000}{r^2} = \frac{10}{3}\pi r \Leftrightarrow 6000 = 10\pi r^3 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{600}{\pi}} \approx 5{,}7588$ und $h = r$

Musterlösung zu der Aufgabe 2



Hinweise: Man findet den Graphen der Ableitungsfunktion, indem man an den Extremstellen und der Sattelstelle von f Nullstellen für f ‘ anlegt, an den Wendestellen von f zeichnet man Extrempunkte von f ‘ (die y-Koordinate kann durch graphisches Differenzieren leicht gefunden werden). Nach einer einfachen Grenzwertbetrachtung kann die Ableitungsfunktion dann gezeichnet werden.