Aufgabe 1

Funktion a)

Definitionsbereich: ID = IR

Grenzwertverhalten: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$

Merke:

Entscheidend für das Grenzwertverhalten ist bei diesem Polynom der Ausdruck $-x^4$. Wegen des geraden Exponenten ist der Grenzwert für positive und negative x-Werte, die betraglich gegen unendlich streben, gleich. Wegen des negativen Koeffizienten $a_4 = -1$ ist dieser Grenzwert jeweils $-\infty$.

Symmetrie:

Es gilt f(x) = f(-x), die Funktion ist also **achsensymmetrisch zur y-Achse**!

$-x^4 + 6x^2 - 5 = -(-x)^4 + 6(-x)^2 - 5$

$-x^4 + 6x^2 - 5 = -x^4 + 6x^2 - 5$

q. e. d.

Nullstellen:

Die Nullstellen findet man durch Substitution, es gilt: $x_{1/2} = 1$ und $x_{2/3} = \pm\sqrt{5}$

y-Achsenabschnitt: $y_A = f(0) = -5$

Funktion b)

Definitionsbereich: ID = IR \ { ± 2 }

Grenzwertverhalten: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Merke:

Der Grad des Polynoms im Nenner ist größer als der Grad des Polynoms im Zähler!

Symmetrie:

Es gilt f(x) = -f(-x), die Funktion ist also punktsymmetrisch zum Ursprung!

$$\frac{x}{x^2-4} = -\left(\frac{-x}{(-x)^2-4}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{x^2-4} \text{ q.e.d.}$$

Nullstellen:

x = 0 (Zähler gleich null setzen)

y-Achsenabschnitt: $y_A = f(0) = 0$

Aufgabe 2

a) $x_1 = -8$ und $x_2 = 4$

Rechnung:

$-\frac{1}{4}x^2 - x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -2 \pm 6$

b) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 4$

Rechnung: Man führt eine Polynomdivision durch, $x_1 = 1$ kann erraten werden!

$$
\begin{array}{l}
\;(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x - 1) = x^2 - 2x - 8 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\qquad -2x^2 - 6x + 8 \\
\qquad \underline{-(-2x^2 + 2x)} \\
\qquad\qquad\quad -8x + 8 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-8x + 8)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\mathbf{0}}
\end{array}
$$

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = 1 \pm 3$

c) $x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \pm 2$

Rechnung:

$x^5 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$ Fallunterscheidung liefert dann die drei Lösungen!

Aufgabe 3

a) $x = 1/6$

Rechnung:

$$-x \cdot (4x - 2) = 4x - (2x - 1)^2 \mid TU$$

$$-4x^2 + 2x = 4x - (4x^2 - 4x + 1) \mid TU$$

$$-4x^2 + 2x = 4x - 4x^2 + 4x - 1 \mid +4x^2 - 8x$$

$$-6x = -1 \mid : (-6)$$

$$x = 1$$

b) $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

Rechnung:

$\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow 2(x+1) - 3 = x^2 - 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0$

Fallunterscheidung liefert dann das Ergebnis! Hauptnenner ist $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$!

Aufgabe 4

a) ID = IR und \W = $\{ x \in IR \mid x \leq 8 \}$

b) ID = $[0{,}5 ; \infty]$ und \W = $[2 ; \infty]$

c) ID = IR \ $\{ 0 \}$ = $] 0 ; \infty]$ = R^+ und \W = ID

Aufgabe 5

a) $p(x) = -\frac{1}{4}(x-8)^2 + 6 = -\frac{1}{4}x^2 + 4x - 10$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x$

c) $p(9) - g(9) = 5{,}75 - 4{,}5 = 1{,}25$

d) $d(x) = p(x) - g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x - 10 - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{4}x^2 + 3{,}5x - 10$

Anmerkung:
Die Parabel liegt in dem betrachteten Intervall oberhalb der Geraden, deshalb subtrahiert man die Geradengleichung von der quadratischen Funktion. Anschließend bringt man die Differenzfunktion, die nun für alle x den Abstand zwischen g und p berechnet, auf Scheitelpunktsform.

$$d(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3{,}5x - 10 = -\frac{1}{4}\left[x^2 - 14x + 40\right]$$
$$= -\frac{1}{4}\left[(x-7)^2 - 9\right] = -\frac{1}{4}(x-7)^2 + 2{,}25$$

Das Maximum wird bei x = 7 mit 2,25 LE angenommen.