Musterlösung der Arbeit

Aufgabe 1

a) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-3}{6-(-2)} = -\frac{1}{2}$; also: $f(x) = -\frac{1}{2}x + b$

$f(-2) = 3$, d. h. $3 = 1 + b \Leftrightarrow b = 2$

also: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

Teil b)

i)

$$\begin{aligned} & -(x-4) &=&\ 3 \cdot (x-1) \\ \Leftrightarrow\ & -x+4 &=&\ 3x-3 \\ \Leftrightarrow\ & 7 &=&\ 4x \\ \Leftrightarrow\ & x &=&\ 1\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} & (x+3)\cdot(x-4) &=&\ x^2+2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-x-12 &=&\ x^2+2 \\ \Leftrightarrow\ & -x-12 &=&\ 2 \\ \Leftrightarrow\ & x &=&\ -14 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} & -2\cdot(x-1)^2 &=&\ (2x-2)\cdot(x+4) \\ \Leftrightarrow\ & -2(x^2-2x+1) &=&\ 2x^2+6x-8 \\ \Leftrightarrow\ & -2x^2+4x-2 &=&\ 2x^2+6x-8 \\ \Leftrightarrow\ & 0 &=&\ 4x^2+2x-6 \\ \Leftrightarrow\ & 0 &=&\ x^2+\tfrac{1}{2}x-1\tfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x_{1/2} &=&\ -\tfrac{1}{4} \pm 1\tfrac{1}{4} \qquad \text{(p-q-Formel)} \end{aligned}$$

also: $x_1 = -1{,}5$ und $x_2 = 1$

Teil c)

i) $(3a-b)^2 - (a+2b)\cdot(2a-b) + 9a(a+b)$

$= 9a^2 - 6ab + b^2 - (2a^2 + 3ab - 2b^2) + 9a^2 + 9ab$

$= 9a^2 - 6ab + b^2 - 2a^2 - 3ab + 2b^2 + 9a^2 + 9ab$

$=$ $\mathbf{16a^2 + 3b^2}$

ii) $(2x + y) \cdot (x - y) - (x - 3y)^2$

$= 2x^2 - xy - y^2 - (x^2 - 6xy + 9y^2)$

$= 2x^2 - xy - y^2 - x^2 + 6xy - 9y^2$

$\boldsymbol{= x^2 + 5xy - 10y^2}$

iii) $(2v + w)^3$

$= (2v + w) \cdot (2v + w)^2$

$= (2v + w) \cdot (4v^2 + 4vw + w^2)$

$= 8v^3 + 8v^2w + 2vw^2 + 4v^2w + 4vw^2 + w^3$

$\boldsymbol{= 8v^3 + 12v^2w + 6vw^2 + w^3}$

Teil d)

i) $3x - 2y = 12 \Leftrightarrow 6x - 4y = 24$

ii) $-x + 4y = -14 \Leftrightarrow -x + 4y = -14$

i) + ii) $5x = 10 \Leftrightarrow$ **$x = 2$ und $y = -3$**

Teil e)

i) $\sqrt{\dfrac{75a^3b^5c}{3ab^3c^3}} = \sqrt{\dfrac{25a^2b^2}{c^2}} = \dfrac{5ab}{c}$

ii) $\sqrt{2ab^3c^5} \cdot \sqrt{32a^9b^5c} = \sqrt{64a^{10}b^8c^6} = 8a^5b^4c^3$

Teil f)

i) $2 \cdot \sqrt{x+4} - 2 = 6$

$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot \sqrt{x+4} = 8$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+4} = 4$

$\Rightarrow \quad x + 4 = 16$

$\Leftrightarrow \quad x = 12$

$L = \{ 12 \}$ (Probe bestätigt, dass $x = 12$ Lösung ist!)

ii) $\sqrt{x^2 - 2} - x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 2} = x - 2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2 = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow \quad 4x = 6$

$\Leftrightarrow \quad x = 1,5$

$L = \{ \}$ (Probe zeigt, dass $x = 1,5$ **keine** Lösung ist!)

Aufgabe 2

Teil a) $p(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

Scheitelpunktsform

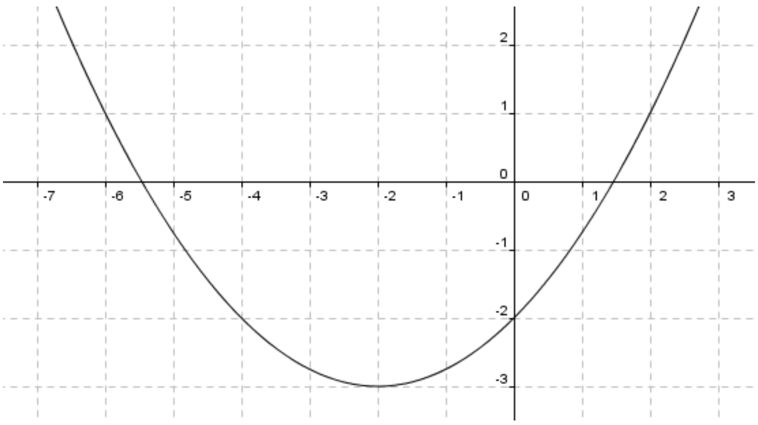
$$p(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2 = \frac{1}{4}(x^2 + 4x - 8) = \frac{1}{4}\left[(x + 2)^2 - 12\right] = \frac{1}{4}(x + 2)^2 - 3$$

Der Scheitelpunkt S(-2/-3) ist ein **Tiefpunkt** (denn: $\frac{1}{4} > 0$)!

Nullstellenberechnung

$p(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{12}$

Skizze



Teil b) $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2{,}5$

Scheitelpunktsform

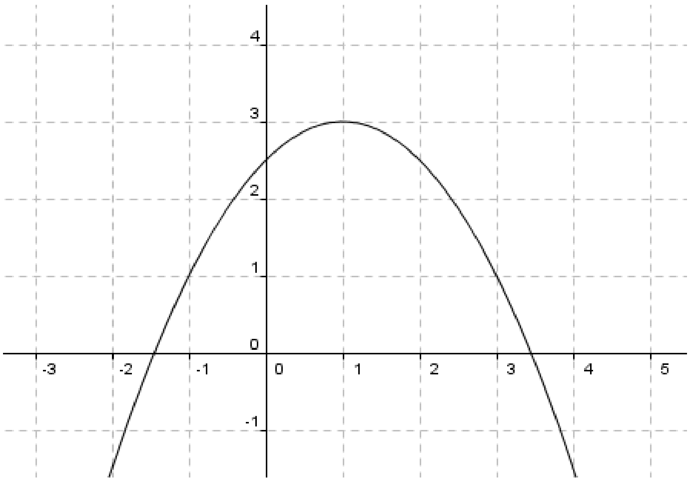
$$p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2{,}5 = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 5) = -\frac{1}{2}\left[(x - 1)^2 - 6\right] = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3$$

Der Scheitelpunkt S(1/3) ist ein **Hochpunkt** (denn: $-\frac{1}{2} < 0$)!

Nullstellenberechnung

$p(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{6}$

Skizze



Aufgabe 3

a) $x_{1/2} = \pm\sqrt{12}$

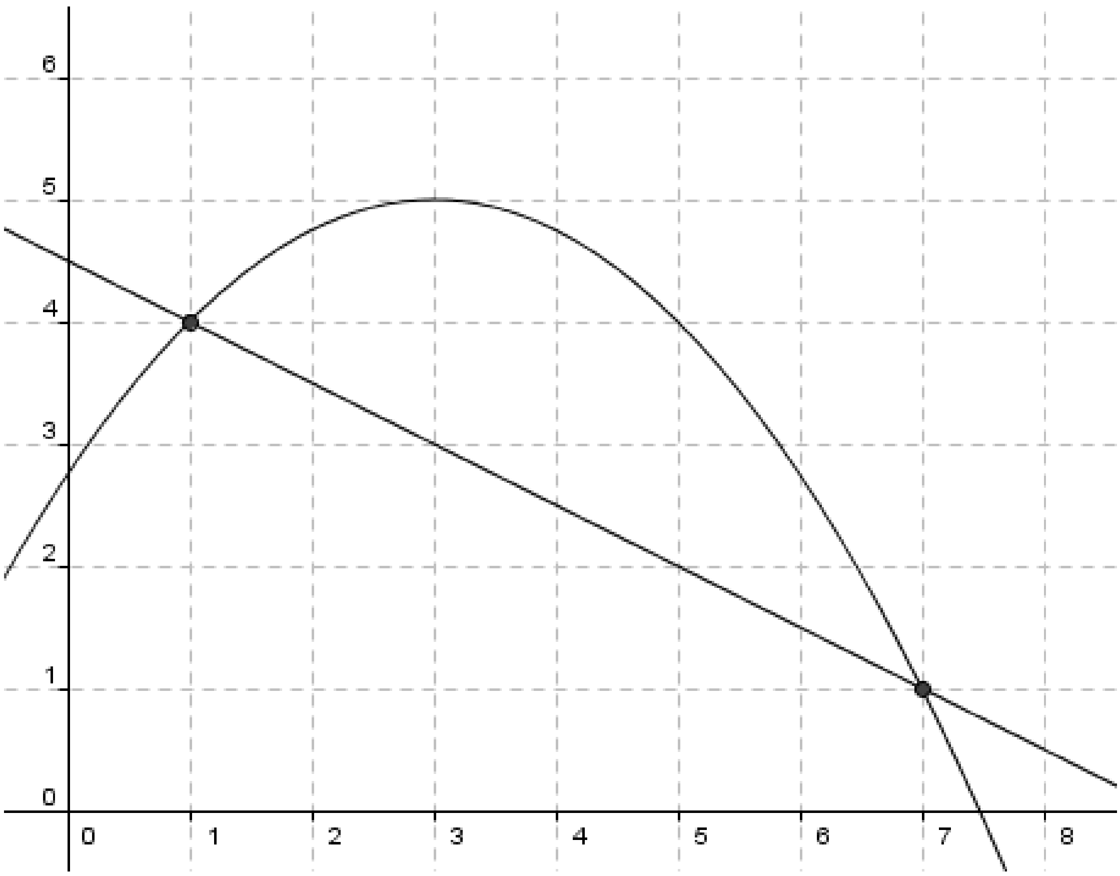
b) $x_1 = 0$, $x_2 = 5$

c) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

d) $x_1 = -2$, $x_2 = 6$

Aufgabe 4

Aufgabenteile a) und b)



Teil c)

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte findet man durch Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen – die y-Koordinaten dann durch Einsetzen der gefundenen x-Koordinaten in eine der beiden Gleichungen!

$$-\frac{1}{4}(x-3)^2 + 5 = -\frac{1}{2}x + 4{,}5 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 1{,}5x + 2{,}75 = -\frac{1}{2}x + 4{,}5 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1{,}75 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

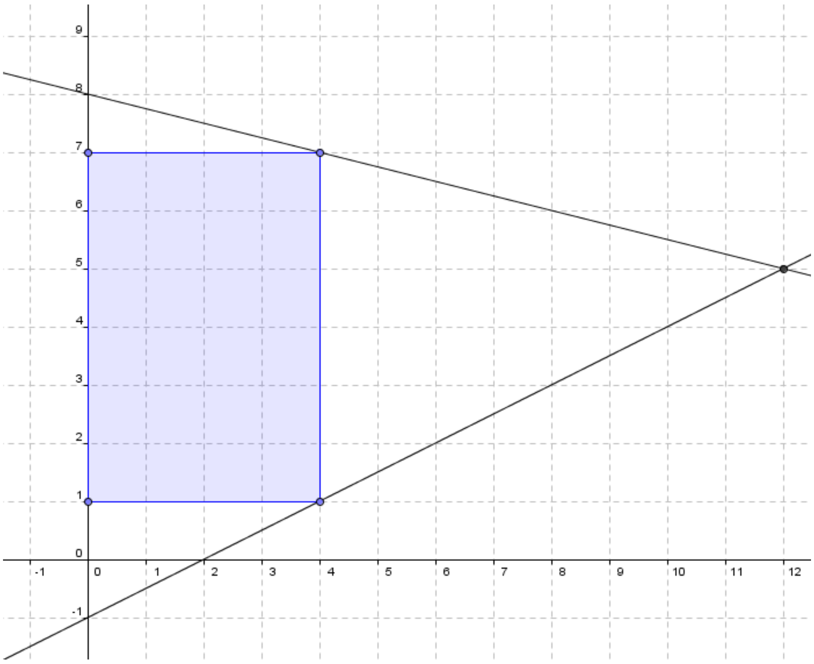
Anwendung der pq-Formel liefert dann: $x_{1/2} = 4 \pm 3$

also: $x_1 = 1$, $y_1 = 4$ und $x_2 = 7$, $y_2 = 1$

Die Schnittpunkte lauten somit $S_1(1/4)$ und $S_2(7/1)$.

Aufgabe 5

Aufgabenteile a) und b)



Teil c)

Die Gerade g_2 liegt in dem zu betrachtenden Intervall über g_1, für den zu maximierenden Flächeninhalt gilt dann:

$F(x) = x \cdot (g_2(x) - g_1(x))$

$\quad = -0{,}75x^2 + 9x$

Überführung in Scheitelpunktsform

$F(x) = -0{,}75x^2 + 9x = -\frac{3}{4} \cdot \left[x^2 - 12x\right] = -\frac{3}{4} \cdot \left[(x-6)^2 - 36\right] = -\frac{3}{4} \cdot (x-6)^2 + 27$

Der maximale Flächeninhalt wird also für $x = 6$ angenommen, es gilt $F_{MAX} = 27$.