Aufgabe 1

Gib jeweils die erste Ableitung der Funktion f bzw. der Kurvenschar f_k an! Vereinfache nur dann, falls sich dies unmittelbar anbietet (AUSKLAMMERN, KÜRZEN etc.)!

a) $f(x) = x^4 + 2 \cdot \sin(x)$

b) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

c) $f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{kx}$

d) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$

e) $f(x) = \sqrt{x \cdot e^{u(x)}}$, wobei u eine differenzierbare Funktion ist.

f) $f(x) = \sin^3(\sqrt{x})$

g) $f(x) = 5^{\sin(x^2)}$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktionenschar $f_k(x) = x^3 \cdot e^{-kx^2}$, wobei $k > 0$ gelte.

a) Für welche Belegung von k geht der Graph von f_k durch den Punkt $P(1/e^{-2})$?

b) Weise eine Symmetrie-Eigenschaft aller Graphen von f_k nach!

c) Fertige eine verkürzte Kurvendiskussion zu dem Repräsentanten $\mathbf{f_1}$ an! Es darf dabei vorausgesetzt werden, dass sich alle Wendepunktkandidaten als Wendepunkte erweisen – die dritte Ableitung ist also **nicht** zu bestimmen!

   Lösungshinweis:

   $f_1''(x) = x \cdot e^{-x^2}(4x^4 - 14x^2 + 6)$

d) Skizziere $\mathbf{f_1}$ in dem Intervall I = [-3 ; 3] unter Ausnutzung des zweiten Aufgabenteils! Wähle dabei eine **sinnvolle Skalierung** auf den beiden Achsen!

e) Untersuche zwei unterschiedliche Repräsentanten der Kurvenschar f_k auf gemeinsame Punkte!

f) Bestimme die exakten Koordinaten der Hochpunkte H_k von f_k in Abhängigkeit von k und gib zudem die **Ortskurve aller Hochpunkte** H_k an! Es darf dabei vorausgesetzt werden, dass sich **sämtliche** Extrempunktkandidaten mit **positiver x-Koordinate** als **Hochpunkte** erweisen!

g) Für welches k hat die Kurvenschar f_k einen Hochpunkt mit der x-Koordinate $\sqrt{3}$?

h) Bestimme die allgemeine Tangentengleichung t_k im Punkt $P_k(1/f_k(1))$!

Aufgabe 3

Bestimme die **Ableitung** der Funktion $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx}$, wobei a und b beliebige reelle Zahlen sind, explizit über den **Limes-Ansatz der Differentialrechnung**, also als Grenzwert eines geeigneten Differenzenquotienten!

Aufgabe 4

Die Skizze unten zeigt einen Ausschnitt des Einheitshalbkreises, einen Punkt $P(x_0/f(x_0))$ auf diesem Einheitshalbkreis sowie die Tangente t in dem Punkt P.

a) Erläutere hinreichend, warum die Funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ den Einheitshalbkreis beschreibt!

b) Warum kann es keine Funktion geben, die den Einheits**voll**kreis beschreibt?

c) Bestimme die **Tangentengleichung t** in dem Punkt $P(x_0/f(x_0))$. Verwechsele dabei **nicht** den Parameter x_0 mit der Variablen x der Tangentengleichung!

d) Berechne die Nullstelle von t und erläutere unter Rückgriff auf das Ergebnis dieser Berechnung in aller Kürze, wie man die Tangente t im Punkt P ohne großen Rechenaufwand konstruieren kann!

Skizze